

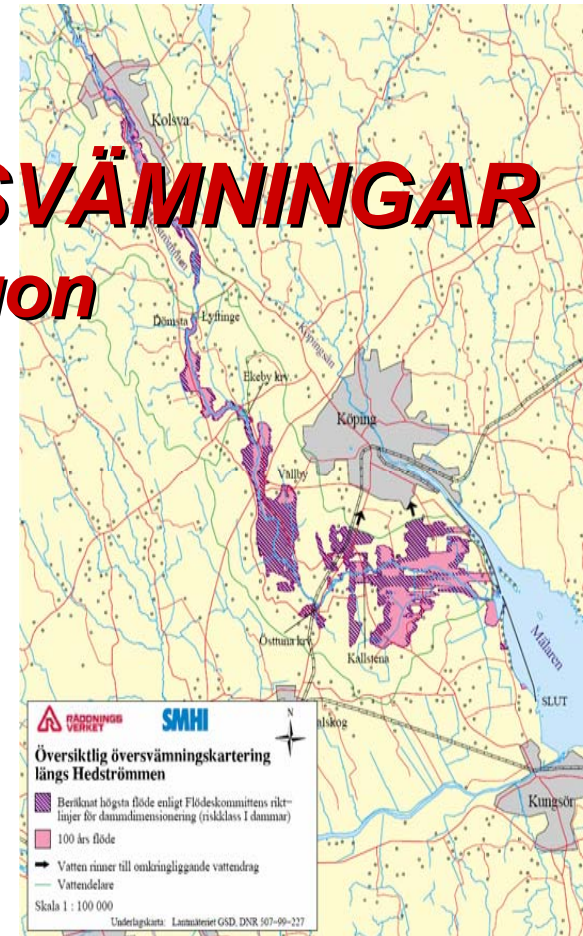
SIMULERING AV ÖVERSVÄMNINGAR *igår, idag, imorgon*

Claes Eskilsson

claes.eskilsson@chalmers.se

Vatten miljö teknik

Chalmers



Källa: Räddningsverket, Rapport 44, 2004

”Spindeln i nätet”

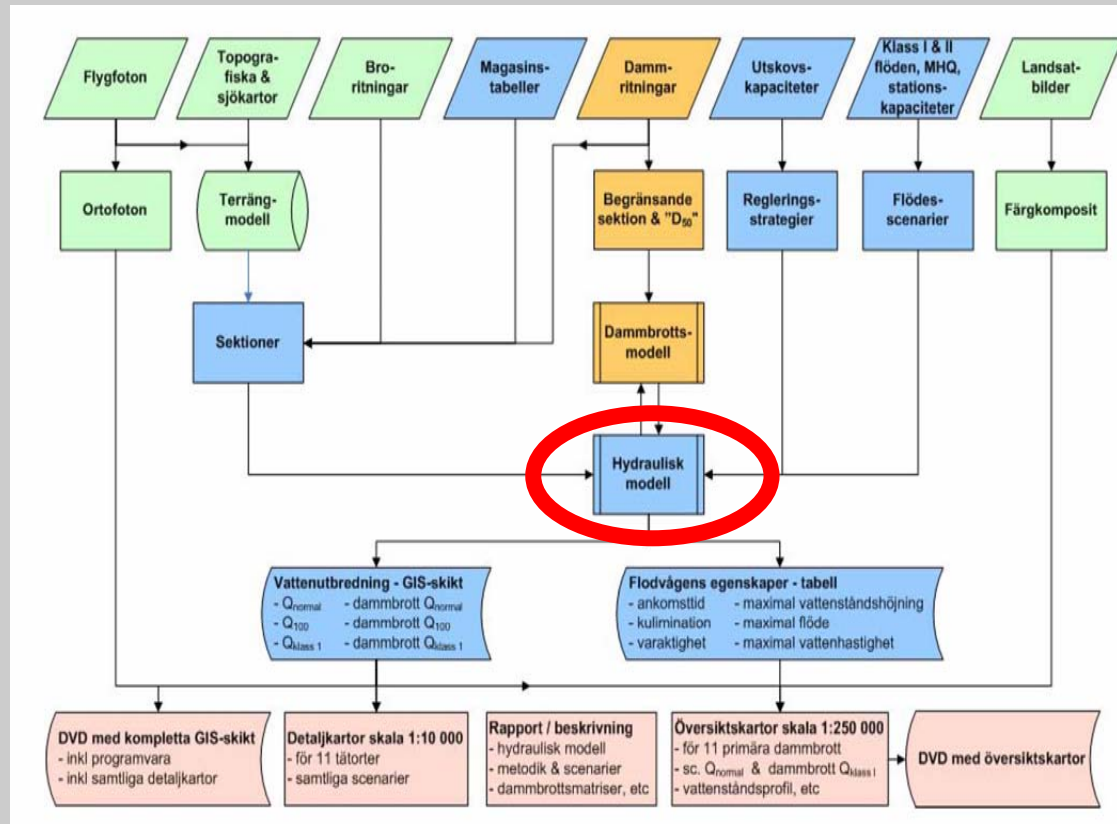
En hydraulisk modell kan, grovt, sägas ”översätta” randvillkor som flöde och geometri till vattennivåer och hastigheter

Den hydrauliska modellen är såsom en ”spindel i nätet”

Då dålig indata naturligtvis ger dålig utdata så handlar mycket i Sverige just nu om att få bättre terrängdata.

Men om modellen inte klarar av att beskriva fysiken så spelar det ingen roll hur bra indata är – resultatet blir ändå dåligt.

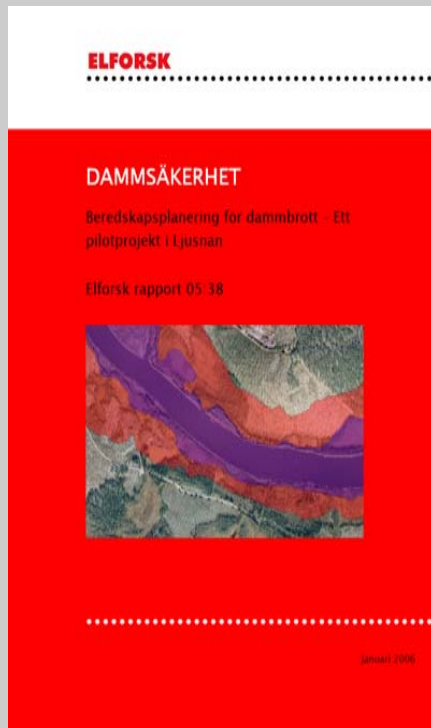
Så, vilket intresse finns det då i Sverige angående hydrauliska modeller och hur de är uppbyggda?



Källa: ELFORSK, Rapport 05:38, 2006

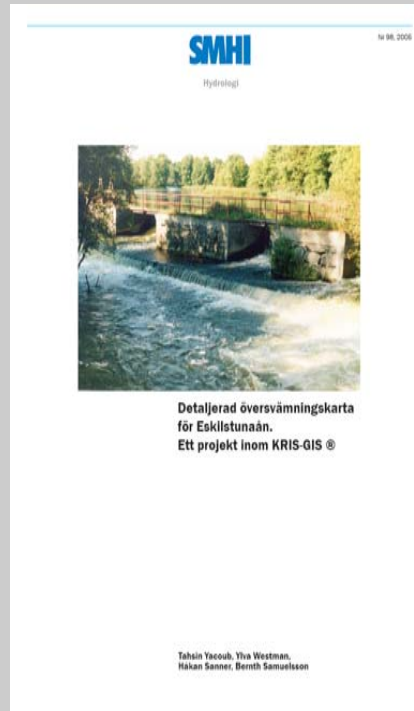
”Spindel” → stort intresse?

3 viktiga och aktuella svenska referensarbeten angående översvämningar:



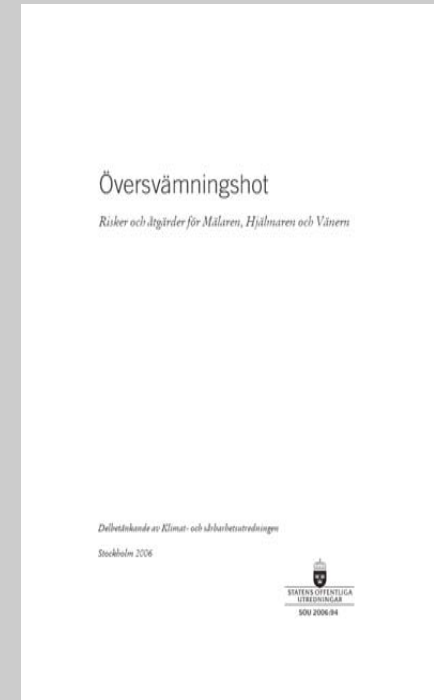
- Detaljerad terrängdata
- Beräkningsscenarios för dammbrott
- Krav på att använda DHIs MIKE 11!

ELFORSK, Rapport 05:38, 2006



- Detaljerad terrängdata
- Modell: DHIs MIKE 11
- Ingen diskussion om eventuell modellförbättring

SMHI, Hydrologi Nr 98, 2005



- Forskningsbehov:
- Planerad översvämning
- Vattendomar
- Detaljerad terrängdata
- Ras och skred

SOU, Rapport Nr 94, 2006

Så varför är det ett så svårt intresse i de hydrauliska modellernas matematiska och numeriska uppbyggnad?

Personligen tror jag att det beror på att vi i Sverige av hävd är brukare mer än utvecklare av hydrauliska modeller. Och inget fel i det, men risken är att vi är på väg att bli okritiska användare – att vi utan att ifrågasätta anammar de modeller som utvecklas och marknadsförs. I Sverige är numera Danish Hydraulic Institute's (DHI) modeller standard för översvämningsskarteringar.



En översvämningsmodell består av modellekvation och numerisk metod

I hydrodynamikens släktträd är vi långt ut på grenarna då vi simulerar översvämningsar:



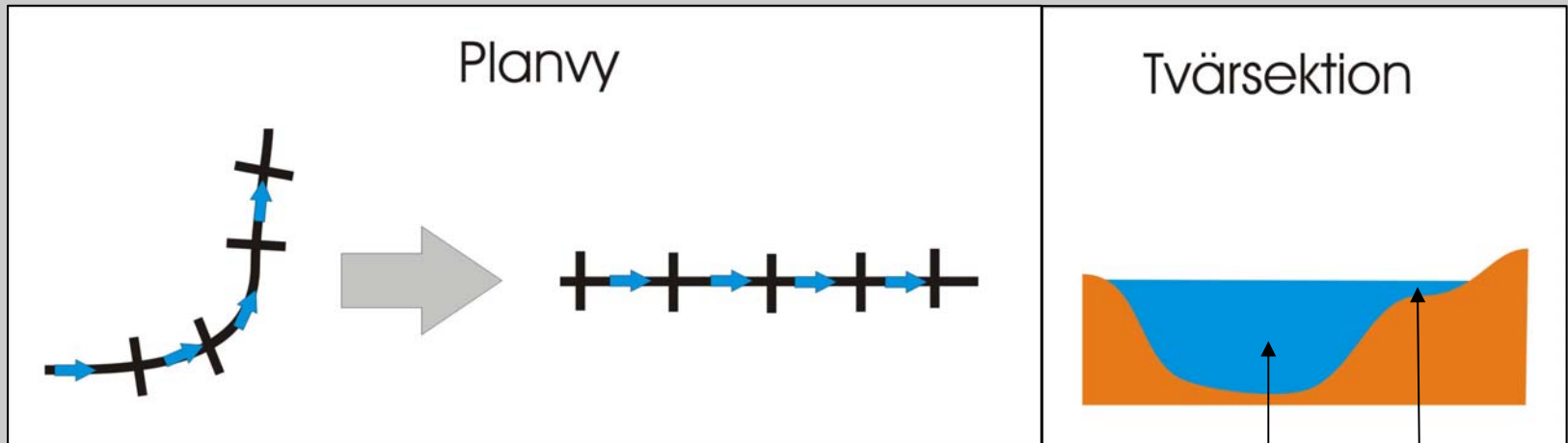
2D Shallow Water Equations (SWE):

Problemet uttryckt enbart i horisontella dimensioner: antar inga vertikala hastigheter och att de horisontella hastigheterna är uniforma över djupet. Samma ekvationer som används för t.ex. tsunamis.

En översvämningsmodell består av modellekvation och numerisk metod

1D St Venant ekvationer:

Ytterligare förenklingar: ingen hastighet tvärs älvens fallriktning, hastigheten konstant i tvärsektionerna, vattenytan konstant i tvärsektionerna.



Samma hastighet på i älvfåran
som i de översvämmade områdena

2D ger bättre beskrivning av:

flacka översvämningsområden, förgreningar, skarpa böjar, fasta objekt (exempelvis hus) och urbana områden

Kostnad? Långa beräkningstider...

En översvämningsmodell består av modellekvation och numerisk metod

Numeriska metoder: FDM, FEM, FVM, SM, SPH, SEM, *hp*-FEM, DG, SFVM, ...

Övergång sub-/superkritiska flöden är speciellt svåra att modellera och regleras av följande teorem:

- **Lax-Wendroffs teorem** (Lax & Wendroff, 1960)

om en konservativ metod konvergerar, ja då konvergerar den mot en unik och fysikt korrekt lösning [konservations lag: $u_t + f(u)_x = s(u)$]

- **Godunovs teorem** (Godunov, 1959)

linjära (som i "konstanta koefficienter") modeller av andra- och högreordningen ger icke-fysiska maxima/minima

- **Hue-LeFlochs teorem** (Hue & LeFloch, 1994)

om en icke-konservativ metod ger en lösning, ja då är det en felaktig lösning vi har beräknat

Hydrauliska modeller: igår är idag?

Mycket kraft har lagts på GUI och GIS men med beräkningsmotorn för hydrodynamiken har kanske inte så mycket hänt ...

DHI: MIKE Flood (MIKE 11)

baseras på finita differenser: "6-point Abbott scheme" (Abbott & Ionescu, 1967)

HR Wallingford: FloodWorks (ISIS)

baseras på finita differenser: "4-point Preissman scheme" (Preissman & Cunge, 1961)

WL | Delft Hydraulics: SOBEK

baseras på finita differenser: "Delft scheme" (Stelling et al., 1998)

Är det några problem med "gamla" beräkningsmotorer?

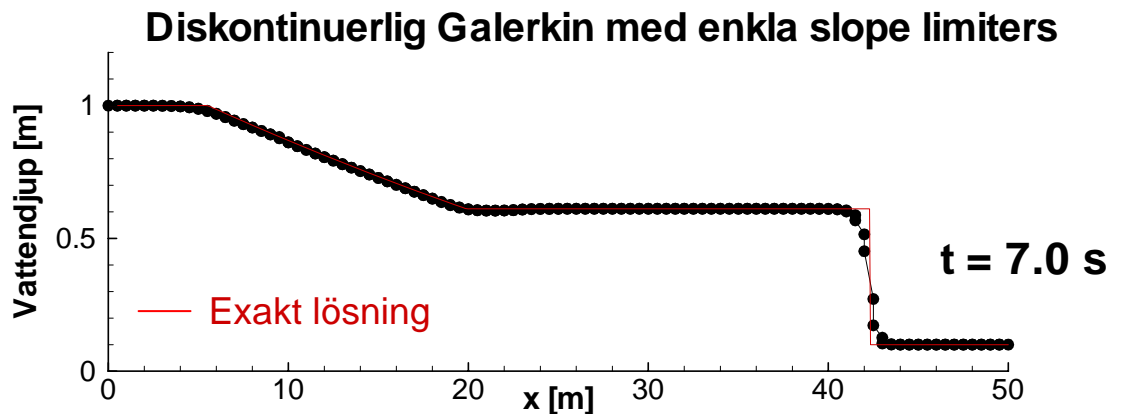
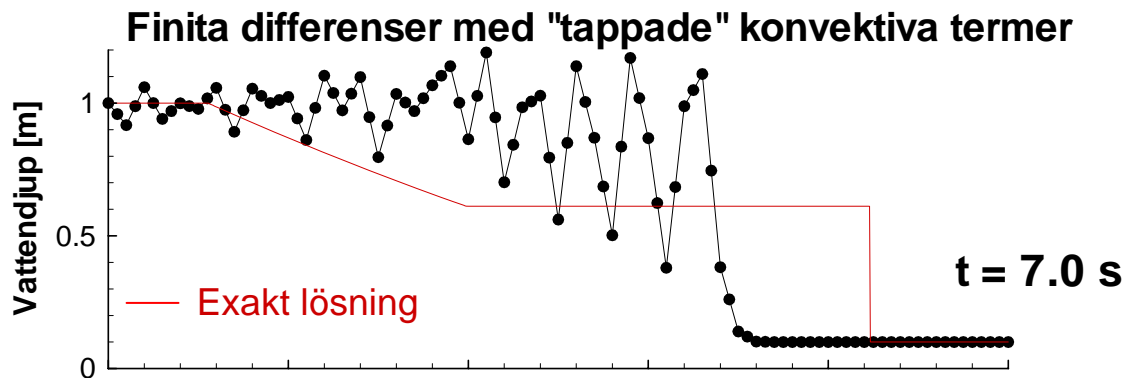
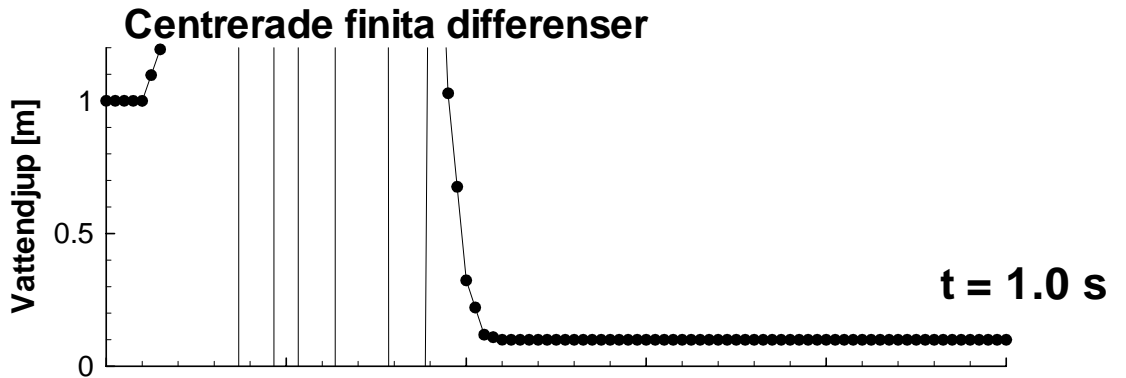
- Ja, speciellt för övergångar mellan sub- och superkritisk strömning!

Ett exempel på övergång sub-/superkritiskt flöde

Lösningen "exploderar" efter 1 s då overshoots/undershoots växer till oändligheten.
(Godunovs teorem)

Overshoots/undershoots begränsas av att alla termer ej är med. Dock en felaktig lösning
(Godunovs teorem, Hue-LeFlochs teorem)

Denna lösning konvergerar mot den korrekta lösningen
(Lax-Wendroffs teorem)



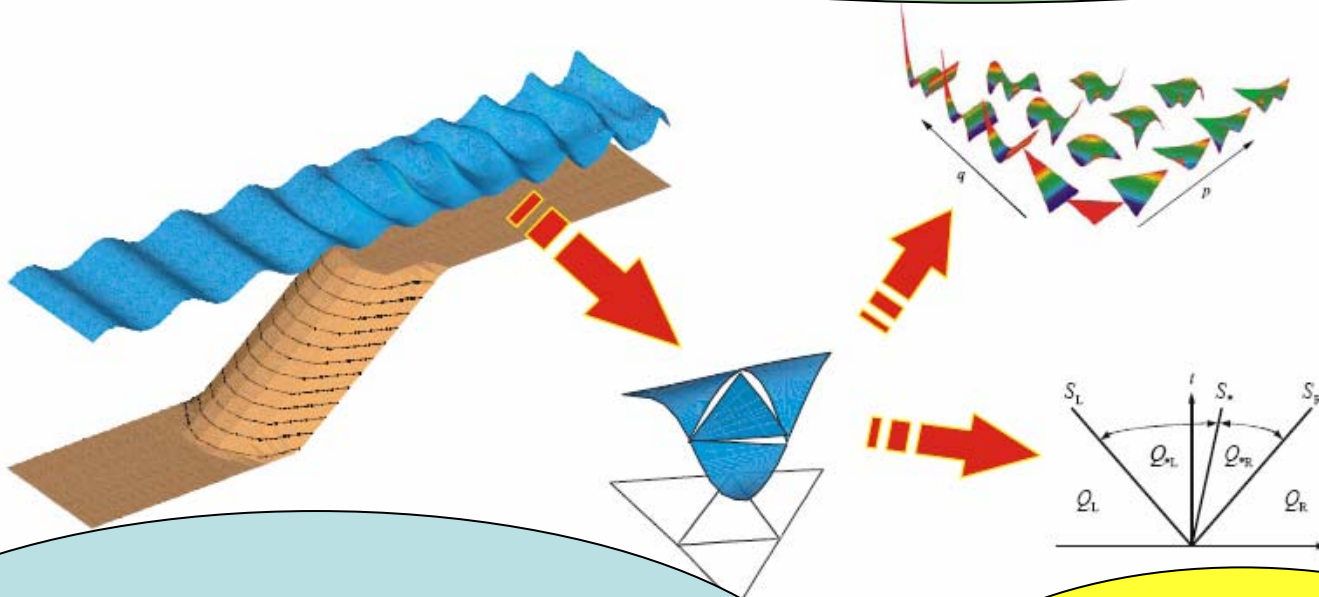
Vad utvecklas idag i forskarvärlden? Flexibilitet och generalitet!

- Huvudsakligen två-dimensionella SWE modeller utvecklas
- Främst metoder som är "lokalt konservativa" – dvs mestadels finita volymer. Detta för att utan approximation och med samma schema lösa både sub- och superkritiska flöden
- Ostrukturerade beräkningsnät prioriteras
- Adaptivitet börjar komma...
- Nästan allt syftar till att skära beräkningstider

Vad görs på Chalmers?

2D adaptiv spectral/hp DG SWE modell

Lösningen approximeras inne i elementen med en polynom expansion av ordning p (obs: kan vara icke-uniform).



Stödjer ostrukturerade beräkningsnät ("conforming" och "non-conforming") bestående av element av storlek h . Notera att lösningen tillåts vara diskontinuerlig över elementens gränser

Elementen kopplas ihop med s.k. "numeriska fluxar" (beräknade med approximativa Riemann lösare) som i FVM.

Varför högre-ordnings metod?

Illustration av metoden m.h.a. advektionsekvationen, dvs allt fel beror på numerisk diffusion (starta animationen genom att klicka på den)

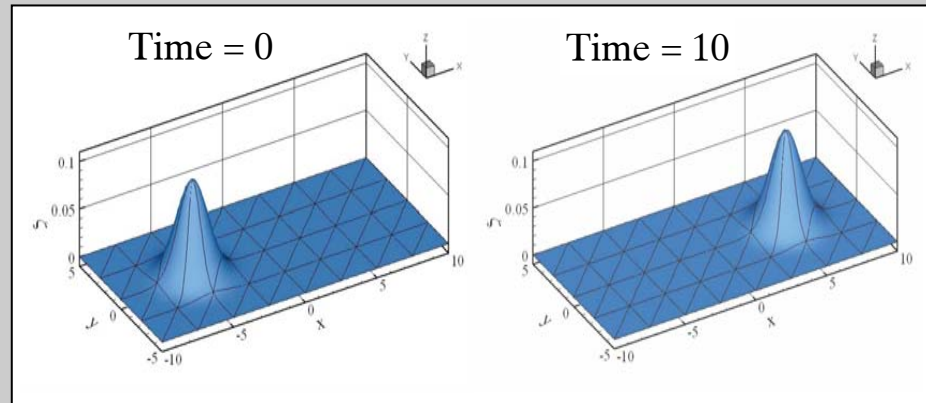
P : graden på polynomutvecklingen ($P = 1$ ger 'standard' FEM)

N_{el} : antal element

Notera att dessa tre fall har ungefär samma antal frihetsgrader och likvärdiga simuleringstider

Hög-ordning sparar beräkningstid även för "ingenjörsmässig" precision

Ett exempel som har en analytisk lösning att jämföra med: ekvatoriell Kelvin våg



Även för så stora fel som 1% av amplituden så är det mer än 10 ggr snabbare att använda ett sjätte-ordningens polynom än ett andra-ordningens polynom!

Table II. CPU time in seconds for obtaining a fixed relative error of the H -component (using a single 2 GHz Pentium IV processor).

Relative error (%)	Integration time	$P=2$		$P=4$		$P=6$	
		CPU	N	CPU	N	CPU	N
10	10	1.1E+00	144	3.7E-01	36	3.3E-01	16
	100	5.2E+01	400	1.0E+01	64	1.3E+01	36
1	10	3.2E+01	1296	2.1E+00	100	1.3E+00	6
	100	4.5E+02	1600	6.0E+01	196	3.1E+01	6

(starta animationen genom att klicka på den)

Avslutningsvis ett par ord om...

... forskningen inom 2D SWE modeller:

- Det kommer allt fler modeller som är byggda med högre-ordningens approximationer;
- Adaptivitet kommer (men än vanligtvis på rektangulära element);
- Att tillämpa *hp*-adaptivitet kommer driva ned beräkningstiderna med i alla fall en storleksordning;
- Ett stort, och i mycket, olöst problem är gränssnittet mellan torr/våt mark. Idag finns det ingen riktigt tilltalande lösning;

... den praktiska modelleringen idag:

- Flertalet, om inte alla, kommersiella modeller lider idag av numeriska tillkortakommanden som det oftast finns färdiga lösningar på;
- Det finns skillnader mellan de numeriska motorerna i de kommersiella modellerna;
- Kopplade 2D/1D modeller bör användas för översvämningsskartering. För varningssystem i realtid är det än så länge 1D som gäller;

... och allra sist:

- 3D modellering då? Jovisst, men det tar nog minst 15-20 år innan 3D översvämningssmodeller kan appliceras på områden som 2D klarar nu...